

Table des matières

Sommaire	3
Introduction	5
Comprendre les mathématiques pour bien les enseigner	5
Un ouvrage structuré	6
Le projet	7

Partie 1 : Traitement de données

Introduction	10
1. Quels types de données, quels types de traitements ?	11
2. Les données sur le curseur du concret à l'abstrait	14
3. Les organisations d'objets, de données	15
3.1. Ranger	16
3.2. Réaliser des ensembles	16
3.2.1. Trier : réaliser deux ensembles complémentaires	16
3.2.2. Classer : réaliser des ensembles disjoints	18
3.2.3. Hiérarchiser : réaliser des ensembles emboîtés	19
3.2.4. Croiser : réaliser des ensembles qui se croisent	21
3.2.5. Difficultés de langage	22
3.2.6. Tableau synthèse des organisations de base	23
3.2.7. Des organisations articulant plusieurs organisations de base	24
4. Des outils de représentation	27
4.1. Les diagrammes ensemblistes et la théorie des ensembles	27
4.1.1. Les éléments primitifs de la théorie des ensembles	27
4.1.1.1. Ensemble et appartenance	27
4.1.1.2. Sous-ensemble et inclusion	28
4.1.2. Les opérations sur les ensembles	29
4.1.2.1. Complémentaire	29
4.1.2.2. Intersection	29
4.1.2.3. Union	29
4.1.2.4. Différence	30
4.1.2.5. Différence symétrique	30
4.1.2.6. Partition	30
4.1.3. Des représentations en diagrammes de Venn	31
4.1.4. Quelques situations de recherche pour les élèves	31
4.2. Les tableaux	33
4.2.1. Les tableaux organisationnels	33
4.2.2. Les tableaux relationnels	34
4.2.3. Les tableaux opératoires	34
4.2.4. Quelques réflexions sur les tableaux	35

4.3. Les arbres	36
4.3.1. Les arbres organisationnels	36
4.3.2. Les arbres de dénombrements	37
4.3.3. Les arbres de décomposition/composition	38
4.3.4. Les arbres d'enchaînement opératoire	38
5. Éléments de logique	42
5.1. Premiers éléments de logique	42
5.2. Les connecteurs logiques	43
5.2.1. La négation : « non », « ne... pas »	43
5.2.2. La conjonction : « et »	44
5.2.3. La disjonction inclusive : « ou »	45
5.2.4. La disjonction exclusive : « soit... , soit... », « ou »	45
5.2.5. L'implication : « si... , alors... »	46
5.2.6. L'équivalence : « si et seulement si... »	47
5.2.7. Quelques propriétés de connecteurs	48
5.3. Les quantificateurs logiques	48
5.3.1. Définition des quantificateurs	48
5.3.2. Usage des quantificateurs	49
5.3.3. Quelques propriétés des quantificateurs	50

Partie 2 : Géométrie

Introduction	54
1. Le repérage	55
1.1. Comment se repère-t-on ?	55
1.1.1. Parallélisme et perpendicularité	55
1.1.2. Direction verticale et directions horizontales	57
1.1.3. Les composantes du repérage	60
1.2. Trois visions de l'espace	63
1.2.1. La vision topologique de l'espace	63
1.2.2. La vision projective de l'espace	63
1.2.3. La vision ordinale de l'espace	64
1.3. Les quadrillages du plan	65
1.3.1. Quadrillage et réseau dans le plan	65
1.3.2. Quadrillage au sens strict	66
1.3.3. Quadrillage au sens élargi	67
1.3.4. Deux utilisations des quadrillages	67
1.3.5. Utilité des quadrillages	67
1.4. Du quadrillage codé au repère orthonormé	68
1.4.1. Plusieurs étapes utiles dans le passage de l'un à l'autre.	68
1.4.2. Le repère orthonormé	70
1.4.3. Les repères cartésiens	70

2. Les formes	73
2.1. Avant-propos	73
2.1.1. La notion de forme	73
2.1.2. Objet/forme/représentation de la forme	75
2.1.3. Solides/surfaces/lignes/points	77
2.1.4. Convexité	78
2.1.5. Bases et hauteurs	80
2.1.5.1. On trouve ces notions dans le quotidien...	80
2.1.5.2. On trouve également ces notions en mathématique mais...	81
2.1.6. Caractéristique/ propriété/ définition en géométrie	87
2.2. Les solides	90
2.2.1. Polyèdres et non polyèdres	90
2.2.2. Polyèdres particuliers	91
2.2.3. Non polyèdres particuliers	94
2.2.4. Des organisations de solides	95
2.3. Les surfaces	97
2.3.1. Généralités	97
2.3.2. Les angles	97
2.3.3. Les polygones	100
2.3.4. Les triangles	105
2.3.4.1. Les triangles et leurs propriétés	105
2.3.4.2. Les triangles et la symétrie	106
2.3.4.3. Les triangles et leurs organisations possibles	107
2.3.4.4. Les triangles et leurs éléments remarquables	108
2.3.5. Les quadrilatères	111
2.3.5.1. Les quadrilatères et leurs angles	111
2.3.5.2. Les quadrilatères et leurs segments remarquables	112
2.3.5.3. Les quadrilatères particuliers et leurs définitions	113
2.3.5.4. Les quadrilatères et leurs propriétés	118
2.3.5.5. Les quadrilatères et leurs organisations possibles	120
2.3.6. Les pavages	124
2.4. Les formes rondes	127
2.4.1. Une ligne et une surface rondes dans le plan	127
2.4.2. Une surface et un solide ronds dans l'espace	128
2.4.3. Des définitions complémentaires	129
3. Le passage 3D-2D	130
3.1. Des représentations en 3D ou en 2D	130
3.2. Les empreintes	132
3.3. Les développements	134
3.3.1. Ce qu'est un développement de solide	134
3.3.2. Ce qui est conservé dans un développement de polyèdre	136
3.3.3. Quelques développements	137
3.4. Les représentations par projections	143
3.4.1. Les projections parallèles et projections centrales (coniques)	143
3.4.2. Les vues coordonnées	145
3.4.3. Les perspectives cavalières	148
3.4.4. La perspective isométrique	150

3.4.5. Les perspectives centrales	152
3.4.6. Choix d'une représentation	154
<hr/>	
4. Les transformations du plan	156
4.1. Qu'est-ce qu'une transformation du plan ?	156
4.2. Les isométries du plan	158
4.2.1. Les translations	160
4.2.1.1. Ce qui définit une translation	160
4.2.1.2. Pour construire l'image d'une figure par translation	160
4.2.2. Les rotations	161
4.2.2.1. Ce qui définit une rotation	161
4.2.2.2. Pour construire l'image d'une figure par rotation	162
4.2.2.3. Une rotation particulière : la symétrie centrale	162
4.2.2.4. Pour construire l'image d'une figure par symétrie centrale	163
4.2.2.5. La notion de centre de symétrie d'une figure	163
4.2.3. Les symétries orthogonales	164
4.2.3.1. Ce qui définit une symétrie orthogonale	164
4.2.3.2. Pour construire l'image d'une figure par symétrie orthogonale	165
4.2.3.3. La notion d'axe de symétrie d'une figure	166
4.3. Les agrandissements et réductions	168
4.3.1. Agrandissements ou réductions et proportionnalité entre grandeurs	169
4.3.2. Ce qui définit géométriquement un agrandissement ou une réduction	170
4.3.3. Identification d'un agrandissement ou d'une réduction d'une figure	171
4.4. Hiérarchie des transformations du plan	173
<hr/>	
5. Les outils en géométrie	176
5.1. Le tracé de figures	176
5.2. Des instruments pour tracer des figures	178
5.2.1. Quels instruments pour tracer des lignes droites ?	178
5.2.2. Quels instruments pour tracer des angles droits ou des droites perpendiculaires ?	179
5.2.3. Quels instruments pour tracer des droites parallèles ?	181
5.2.4. Quels instruments pour tracer des cercles ?	181
5.2.5. Quels instruments pour tracer des angles ?	182
5.3. Utilisation de logiciels de géométrie	182
5.4. Les constructions « à la règle et au compas »	184
5.4.1. Construction de la médiatrice d'un segment	184
5.4.2. Construction de la bissectrice d'un angle	185
5.4.3. Construction de quelques polygones réguliers	186
<hr/>	

Partie 3 : Grandeurs

Introduction	192
1. La notion de grandeur	193
1.1. Qu'est-ce qu'une grandeur ?	193
1.2. Grandeurs discontinues et grandeurs continues	193
1.3. Les grandeurs usuelles	194
1.3.1. Les grandeurs usuelles abordées à l'école	196
1.3.1.1. Grandeurs simples	196
1.3.1.2. Grandeurs composées	197
1.3.2. D'autres grandeurs usuelles rencontrées dans la vie quotidienne	198
1.3.2.1. Dans le monde de l'informatique	198
1.3.2.2. Autres grandeurs rencontrées	199
1.4. Distinction entre objet et grandeur(s) associée(s)	200
1.5. Les mots pour parler de grandeurs	201
1.5.1. Vocabulaire précis et adéquat	201
1.5.2. Polysémie et vocabulaire élargi	201
1.6. L'invariance ou la conservation de grandeur	202
2. L'approche qualitative ou quantitative des grandeurs	204
2.1. Les comparaisons de grandeurs	204
2.1.1. Les comparaisons implicites ou explicites	204
2.1.2. Les comparaisons non quantifiées ou quantifiées, leurs symbolisations	205
2.1.4. Les modalités de comparaison	206
2.1.5. Les actions physiques et le vocabulaire associés aux comparaisons	206
2.2. Les organisations d'objets selon une grandeur	208
2.3. Les opérations sur les grandeurs quantifiées ou non	209
3. Les grandeurs quantifiées en mesurant avec des étalons non conventionnels	211
3.1. Les situations qui amènent au mesurage	211
3.2. Étalon, unité de mesure, mesure, mesurer, mesurage	211
3.3. Étalons non conventionnels et unités non conventionnelles	213
4. Les systèmes d'unités de mesure conventionnelles de grandeurs	215
4.1. Unités et étalons conventionnels de base	215
4.2. Systèmes d'unités de mesure conventionnelles	216
4.2.1. Les longueurs	216
4.2.1.1. Les unités conventionnelles de longueur	216
4.2.1.2. Le tableau des unités conventionnelles de longueur abordé à l'école	217
4.2.1.3. Le tableau des unités conventionnelles de longueur étendu	217
4.2.1.4. Les instruments de mesure de longueur	218

4.2.2. Les superficies ou les aires	219
4.2.2.1. Les unités conventionnelles de superficie ou d'aire	219
4.2.2.2. Le tableau des unités conventionnelles de superficie abordé à l'école	222
4.2.2.3. Les instruments de mesure de superficie	222
4.2.3. Les volumes	222
4.2.3.1. Les unités conventionnelles de mesure de volume	222
4.2.3.2. Le tableau des unités conventionnelles de volume abordé à l'école	223
4.2.3.3. Les instruments de mesure de volume	224
4.2.4. Les capacités	224
4.2.4.1. Les unités conventionnelles de capacité	224
4.2.4.2. Le tableau des unités conventionnelles de capacité abordé à l'école	225
4.2.4.3. Les instruments de mesure de capacité	226
4.2.5. Les masses (poids)	226
4.2.5.1. Deux unités conventionnelles de base de masse (poids)	226
4.2.5.2. Les unités conventionnelles de masse (poids)	228
4.2.5.3. Le tableau des unités conventionnelles de masse (poids) abordé à l'école	229
4.2.5.4. Les instruments de mesure de masse (poids)	229
4.2.6. Les durées	230
4.2.6.1. Les unités de durée et les durées de référence	230
4.2.6.2. Origine des unités de durée	231
4.2.6.3. Le tableau des unités de durée	232
4.2.6.4. Les deux axes du temps : chronologie et simultanéité	232
4.2.6.5. Se représenter des durées	233
4.2.6.6. Les deux formes du temps : linéaire et circulaire	234
4.2.6.7. Les deux aspects du temps : durée et instant	235
4.2.6.8. Les instruments de mesure de durée et de repérage dans le temps	238
4.2.7. Les amplitudes	239
4.2.7.1. Les unités conventionnelles d'amplitude	239
4.2.7.2. Les instruments de mesure d'amplitude	240
4.2.8. Les prix	241
4.3. Images mentales	242
4.3.1. Quelques images mentales	243
4.3.2. La proportionnalité inverse	247
4.4. À propos des abaques	249
4.4.1. Organisation et signification des préfixes dans les abaques	249
4.4.2. Écriture des mesures dans les abaques	249

5. Calculer pour déterminer une grandeur : périmètre, aire et volume	251
5.1. Les procédures de calcul de périmètres	252
5.1.1. Périmètre des polygones	252
5.1.1.1. Formule générale	252
5.1.1.2. Cas particuliers	254
5.1.2. Périmètre des disques	255
5.2. Les procédures de calcul d'aires	257
5.2.1. Aire des polygones	258
5.2.1.1. Aire des rectangles	258
5.2.1.2. Aire des quadrilatères et des triangles	260
5.2.1.3. Aire des polygones réguliers	263
5.2.2. Aire des disques	264
5.2.2.1. « Intuition » de la formule	264

5.2.2.2.	À partir des polygones réguliers	265
5.2.2.3.	À partir d'un triangle	266
5.3.	Les procédures de calcul de volumes	268
5.3.1.	Volume des polyèdres	268
5.3.1.1.	Volume des parallélépipèdes rectangles	268
5.3.1.2.	Volume des prismes	270
5.3.1.3.	Volume des pyramides	271
5.3.2.	Volume des cylindres	272
5.3.3.	Volume des cônes	272
5.3.4.	Volume des boules	273
6.	Les relations entre grandeurs	274
6.1.	Les représentations des relations entre grandeurs	274
6.1.1.	Le graphe sagittal et le tableau de correspondance	274
6.1.2.	Le graphique cartésien	275
6.2.	Les grandeurs directement proportionnelles	278
6.2.1.	Comment les reconnaître ?	278
6.2.2.	La proportionnalité directe à la loupe	281
6.2.2.1.	Propriétés	281
6.2.2.2.	Représentations	283
6.2.2.3.	La résolution de problèmes de proportionnalité	284
6.3.	Grandeurs inversement proportionnelles	287
6.3.1.	Comment les reconnaître ?	287
6.3.2.	La proportionnalité inverse à la loupe	287
6.3.2.1.	Propriétés	287
6.3.2.3.	Représentations	288
6.3.3.	Autres exemples	289
6.4.	Grandeurs composées et proportionnalité	291
6.4.1.	La vitesse	291
6.4.2.	Autres cas : échelle, débit, masse (poids) volumique, prix au kilo, densité de population	293
6.5.	Ordre des grandeurs, influence sur le rapport de proportionnalité	294
6.6.	Proportionnalité et compensation	296
7.	Les fractions	297
7.1.	Notion de fraction	297
7.1.1.	Fraction opérateur	298
7.1.2.	De la fraction opérateur vers la fraction nombre	302
7.1.3.	Fraction nombre	304
7.1.4.	Fraction rapport	305
7.2.	Autour des fractions équivalentes	307
7.2.1.	Fractions équivalentes	307
7.2.2.	Simplification de fraction et fraction irréductible	309
7.2.3.	Mise au même dénominateur	311
7.2.4.	Comparaison de fractions	314
7.2.4.1.	Comparaison de fractions à l'unité	314
7.2.4.2.	Comparaison de fractions entre elles	315

7.3. Opérations sur les fractions	317
7.3.1. Addition (et soustraction) de fractions	318
7.3.2. Multiplication de fractions	320
7.3.2.1. Multiplication d'un nombre et d'une fraction	320
7.3.2.2. Multiplication de deux fractions	321
7.3.3. Division de fractions	323
7.3.3.1. Division d'une fraction par un nombre	323
7.3.3.2. Division par une fraction	324
7.4. Fractions décimales	325
7.5. Les pourcentages	326
7.5.1. Notion de pourcentage	326
7.5.2. Pourcentage d'une grandeur	327
7.5.3. Application successive de deux pourcentages	331
7.5.4. Pourcentage et pente	332

Les POURQUOI	335
---------------------	-----

Bibliographie	337
----------------------	-----

Index	341
--------------	-----
