

Table des matières

Sommaire	3
Introduction	5
Comprendre les mathématiques pour bien les enseigner	5
Un ouvrage structuré	6
Le projet	7

Partie 1 : Résolution de problèmes

Introduction	10
1. Problèmes ou situations problèmes ?	11
2. Qu'est-ce qu'une situation problème ?	12
3. Trois fonctions possibles des situations problèmes	13
4. Compétences de « résolveur » de situations problèmes	15
5. Paramètres et grille d'analyse des situations problèmes	18
5.1. Une variété de paramètres	18
5.2. Problèmes ouverts, fermés, semi-ouverts	18
5.3. Problèmes à une ou plusieurs solutions	19
5.4. Grille d'analyse des situations problèmes	20
6. Situations à modélisation spécifique	22
6.1. Les problèmes de partages inégaux	22
6.2. Les problèmes d'intervalles	24
6.3. Les problèmes liant des données commerciales ou autres	26

Partie 2 : Traitement de données numériques

Introduction	30
1. Éléments de combinatoire	31
1.1. Les situations « produits »	31
1.2. Les permutations	34
1.3. Les arrangements	36
1.4. Les combinaisons	39

2. Éléments de probabilités	42
2.1. Probabilités et pensée probabiliste	42
2.1.1. Expérience aléatoire, hasard et probabilité	42
2.1.2. Expérience aléatoire et évènement	44
2.1.3. Notion de probabilité	45
2.1.4. Pensée probabiliste	47
2.2. Probabilité expérimentale	49
2.2.1. Approche qualitative de la notion de fréquence d'un évènement	49
2.2.2. Spécificités de l'approche expérimentale de la probabilité	50
2.2.3. Pertinence de l'approche expérimentale de la probabilité	52
2.2.4. Recours aux simulations et aux outils numériques	53
2.3. Probabilité théorique	54
2.3.1. Spécificités de l'approche théorique de la probabilité	54
2.3.2. Notions élémentaires de probabilités théoriques	54
3. Éléments de statistique	58
3.1. Cerner la situation et collecter des données	59
3.1.1. Poser une question statistique et enquêter	59
3.1.2. Enquêter au moyen d'un sondage	60
3.1.2.1. Des questions de sondage pertinentes	60
3.1.2.2. Les types de données recherchées	61
3.1.2.3. Les facteurs influençant les résultats d'un sondage	61
3.1.2.4. Les caractéristiques d'un échantillon représentatif	62
3.1.2.5. L'enregistrement des données récoltées	63
3.2. Organiser, présenter, analyser les données	65
3.2.1. Une organisation de base : le tableau des effectifs	65
3.2.2. La notion de fréquence en statistique	66
3.2.3. Diverses représentations graphiques des séries statistiques	68
3.2.3.1. Le diagramme à tiges et à feuilles	69
3.2.3.2. Le diagramme circulaire	70
3.2.3.3. Le diagramme en bâtonnets	72
3.2.3.4. L'histogramme	75
3.3. Interpréter des données par des indicateurs statistiques	79
3.3.1. Un indicateur de dispersion : l'étendue	79
3.3.2. Des indicateurs de position : les valeurs centrales	79
3.3.2.1. La moyenne	79
3.3.2.1.1. Moyenne et partage équitable	80
3.3.2.1.2. Moyenne arithmétique d'une série statistique	82
3.3.2.2. Le mode	83
3.3.2.3. La médiane	83
3.3.3. Interpréter au moyen des valeurs centrales	84

Partie 3 : Nombres

Introduction	88
1. Les nombres naturels	89
1.1. Les aspects du nombre	91
1.1.1. Aspect cardinal du nombre naturel	92
1.1.2. Aspect ordinal du nombre naturel	93
1.1.3. Articulation entre aspect cardinal et aspect ordinal	94
1.1.4. Notions liées à ces deux aspects du nombre	96
1.2. Les fonctions des nombres	98
1.2.1. Les nombres pour comparer	98
1.2.2. Les nombres pour mémoriser	100
1.2.3. Les nombres pour anticiper	100
1.3. Les désignations des nombres	100
1.3.1. Désignations verbales des nombres	101
1.3.2. Désignations schématiques des nombres	101
1.3.3. Désignations symboliques des nombres	102
1.3.3.1. Distinction entre chiffre et nombre	103
1.3.3.2. Significations des écritures chiffrées	104
1.4. Le dénombrement	105
1.4.1. Le principe de création mentale des unités	106
1.4.2. Le principe d'adéquation unique	106
1.4.3. Le principe de cardinalité	107
1.4.4. Les principes d'invariance du cardinal et de non-pertinence de l'ordre	107
1.5. Les décompositions	109
2. Les supports structurants	111
2.1. Les schèmes	111
2.1.1. Types de schèmes	112
2.1.2. Critères d'analyse des schèmes	115
2.2. De la bande numérique à la droite des nombres	118
2.3. Le tableau des cent premiers nombres	123
3. Les différents types de nombres	124
3.1. Les nombres entiers relatifs	125
3.2. Les nombres rationnels	126
3.3. Les nombres réels	128
3.4. Les ensembles de nombres	128
4. La numération	129
4.1. Deux types de systèmes de numération écrite	129
4.1.1. Les numérations additives	130
4.1.2. Les numérations de position	130

4.2. Des numérations en évolution	132
4.2.1. L'évolution vers notre numération décimale de position	132
4.2.2. L'évolution du système romain	133
4.3. La numération décimale positionnelle à la loupe	135
4.3.1. La numération décimale positionnelle écrite : les grands principes	135
4.3.2. Les nombres à virgule	137
4.3.3. L'écriture des grands nombres	138
4.3.4. Notre numération décimale orale	141
4.4. Matériel de numération	143

Partie 4 : Opérations et calcul

Introduction	148
---------------------	-----

1. Opérations, un monde vaste et complexe	149
--	-----

1.1. Qu'entend-on par « opération » ?	149
1.2. Opérer a-t-il toujours du sens ?	149

2. Définitions mathématiques des opérations	150
--	-----

2.1. Les opérations « directes » : addition – multiplication	151
2.1.1. La somme de deux nombres naturels	151
2.1.2. L'addition vue comme une opération qui combine	151
2.1.3. L'addition vue comme une opération qui transforme	152
2.1.4. Les interprétations de l'addition	153
2.1.5. Le produit de deux nombres naturels	153
2.1.6. La multiplication vue comme opération qui combine	154
2.1.7. Une autre définition du produit de deux nombres naturels	155
2.1.8. La multiplication vue comme une opération qui transforme	157
2.1.9. Les interprétations de la multiplication	158
2.2. Les opérations réciproques : soustraction – division	159
2.2.1. Différence de deux nombres naturels	159
2.2.2. Soustraction	160
2.2.3. Soustraction comme opération réciproque de l'addition	161
2.2.4. Interprétations de la soustraction	161
2.2.5. Quotient de deux nombres naturels	162
2.2.6. Pourquoi ne peut-on pas diviser par zéro ?	163
2.2.7. Division euclidienne	163
2.2.8. Division exacte	164
2.2.9. Division exacte comme opération réciproque de la multiplication	164
2.2.10. Interprétations de la division	165

3. Sens des opérations	166
-------------------------------	-----

3.1. Quelques préalables pour organiser les sens des opérations	166
3.1.1. L'importance de lier les opérations à des situations	166
3.1.2. La variété des situations liées à la variété des contextes numériques	166

3.1.3. De la situation vers l'opération : plusieurs étapes utiles	166
3.1.4. Poser un calcul et chercher le résultat	169
3.2. Les dynamiques opératoires essentielles et les sens au quotidien	171
3.2.1. Combiner	171
3.2.2. Transformer	171
3.2.3. Comparer	173
3.2.4. Tableau de synthèse	174
3.3. Les différents sens des opérations dans le champ additif	175
3.3.1. Combiner dans le champ additif	175
3.3.2. Transformer dans le champ additif	176
3.3.3. Comparer dans le champ additif	178
3.3.4. Différentes façons de penser une soustraction : retrait - écart	179
3.4. Les différents sens des opérations dans le champ multiplicatif	180
3.4.1. Combiner dans le champ multiplicatif	180
3.4.2. Transformer dans le champ multiplicatif	182
3.4.3. Comparer dans le champ multiplicatif	185
3.4.4. Différentes façons de penser une division : partage - contenance - rapport	187
4. Propriétés des opérations	192
4.1. Commutativité	192
4.1.1. Cas de l'addition et de la multiplication	193
4.1.2. Cas de la soustraction et de la division	193
4.2. Associativité	194
4.2.1. Cas de l'addition et de la multiplication	195
4.2.2. Cas de la soustraction et de la division	195
4.3. Compensation	196
4.3.1. Cas de l'addition et de la multiplication	196
4.3.2. Cas de la soustraction et de la division	198
4.4. Distributivité	201
4.4.1. Distributivité de la multiplication sur l'addition	201
4.4.2. Distributivité de la multiplication sur la soustraction	201
4.4.3. Double distributivité	202
4.4.4. Cas de la division	203
4.5. Élément neutre	203
4.5.1. Cas de l'addition et de la multiplication	203
4.5.2. Cas de la soustraction et de la division	204
4.6. Élément absorbant	204
4.7. Élément symétrique	204
5. Extension des opérations aux autres nombres	206
5.1. Extension des quatre opérations aux nombres entiers relatifs	207
5.1.1. Addition dans \mathbb{Z}	207
5.1.2. Soustraction dans \mathbb{Z}	210
5.1.3. Multiplication dans \mathbb{Z}	212
5.1.4. Division dans \mathbb{Z}	213

5.2.	Extension des quatre opérations aux nombres décimaux à virgule	214
5.2.1.	Addition et soustraction de nombres décimaux à virgule positifs	215
5.2.2.	Multiplication de nombres décimaux à virgule positifs	215
5.2.3.	Division de deux nombres décimaux à virgule positifs	216
5.3.	Extension des quatre opérations aux nombres rationnels	218
5.4.	Extension des quatre opérations aux nombres réels	218
<hr/>		
6.	Puissances et racines	220
6.1.	Notion de puissance	220
6.2.	Notion de racine	222
<hr/>		
7.	Calcul	225
7.1.	Dépasser le comptage pour vraiment calculer	225
7.2.	Trois clés pour pouvoir calculer	226
7.2.1.	Mobiliser des images mentales des nombres	227
7.2.2.	Mobiliser les sens et les propriétés des opérations	228
7.2.3.	Mobiliser le sens de l'égalité	229
7.3.	Quatre grandes stratégies de calcul	230
7.4.	Construction du calcul automatisé	233
7.4.1.	Répertoire de calculs automatisés dans le champ additif	234
7.4.2.	Répertoire de calculs automatisés dans le champ multiplicatif	236
7.4.3.	Calcul automatisé au service des estimations	239
7.5.	Procédés de calcul réfléchi	242
7.5.1.	Commuter les termes ou les facteurs	242
7.5.2.	Décomposer puis réassocier ou distribuer	243
7.5.2.1.	Procédés de décomposition dans le champ additif	243
7.5.2.2.	Procédés de décomposition dans le champ multiplicatif	245
7.5.3.	Agir sur un nombre et compenser sur l'autre	249
7.5.3.1.	Procédés de compensation dans le champ additif	249
7.5.3.2.	Procédés de compensation dans le champ multiplicatif	250
7.5.4.	Étendre des procédés de calcul réfléchi aux nombres décimaux à virgule	253
7.5.4.1.	Calcul réfléchi avec les nombres décimaux à virgule dans le champ additif	253
7.5.4.2.	Calcul réfléchi avec les nombres décimaux à virgule dans le champ multiplicatif	253
7.5.5.	Tableau de synthèse des outils en calcul réfléchi	256
7.6.	Usage des parenthèses dans les calculs et priorité des opérations	258
7.7.	Algorithmes de calcul écrit avec les nombres naturels	260
7.7.1.	Algorithme d'addition écrite	261
7.7.2.	Algorithme de soustraction écrite	262
7.7.3.	Algorithme de multiplication écrite	265
7.7.4.	Algorithme de division écrite	270
7.8.	Calcul écrit avec des nombres décimaux à virgule	275
7.8.1.	Addition et soustraction écrites avec des nombres décimaux à virgule	275
7.8.2.	Multiplication écrite avec des nombres décimaux à virgule	276
7.8.3.	Division écrite avec des nombres décimaux à virgule	278

8. Familles de nombres	281
8.1. Familles de nombres en lien avec des configurations de points	281
8.1.1. Nombres pairs et impairs	281
8.1.2. Nombres rectangulaires et carrés	282
8.1.3. Nombres triangulaires	284
8.2. Divisibilité	286
8.2.1. Diviseurs et multiples d'un nombre	286
8.2.2. Tables de multiplication	290
8.2.2.1. Table des multiples et table de multiplication	290
8.2.2.2. Représentations des tables	292
8.2.2.3. Tableaux organisateurs des tables	293
8.2.2.4. Outils de mémorisation des tables	296
8.2.3. PGCD et PPCM	300
8.2.4. Nombres premiers	301
8.2.4.1. Ensemble infini des nombres premiers	301
8.2.4.2. Décomposition en facteurs premiers	303
8.2.4.3. Intérêts des décompositions en facteurs premiers	303
8.2.5. Caractères de divisibilité	305
8.2.5.1. Caractères de divisibilité utilisant le(s) dernier(s) chiffre(s) du nombre	305
8.2.5.2. Caractères de divisibilité utilisant tous les chiffres du nombre	307

Partie 5 : Algèbre

Introduction	310
1. Objets fondamentaux	311
1.1. La lettre	312
1.2. Les expressions algébriques	313
1.3. Les monômes et polynômes	315
1.4. L'égalité	316
2. Calcul algébrique	317
2.1. Somme et produit algébriques	317
2.2. Propriété de distributivité	318
2.3. Identités remarquables	319
2.4. Méthodes de factorisation	320
3. Transformations d'égalités	322
3.1. Principes d'équivalence	322
3.2. Équations	323

	Les POURQUOI	329
	Bibliographie	331
	Index	337
	Index TOME 1	337
	Index TOME 2	341
	Table des matières	343