

Table des matières

Avant-propos	V
Comment s’y prendre ?	X
Sommaire	XII
1. Fonctions réciproques et cyclométriques	1
Introduction	1
Exploration	2
Synthèse	5
1. Qu’appelle-t-on réciproque d’une fonction ? Comment la déterminer ?	5
1.1 Réciproque d’une fonction	5
1.2 Fonction injective – Injection	5
1.3 Fonction surjective – Surjection	5
1.4 Fonction bijective – Bijection	5
1.5 Caractère fonctionnel de la réciproque d’une fonction injective	6
1.6 Domaine de définition et ensemble-image d’une fonction réciproque	7
1.7 Caractère symétrique du lien entre une fonction et sa réciproque	7
2. Comment restreindre le domaine de définition d’une fonction pour pouvoir construire une fonction réciproque ?	9
3. Comment calculer la dérivée d’une fonction réciproque ?	10
1.8 Dérivée d’une fonction réciproque	10
4. Comment définir les fonctions cyclométriques ? Quelles sont leurs propriétés ?	11
1.9 Fonction arc sinus	12
1.10 Dérivée de la fonction arc sinus	12
1.11 Fonction arc cosinus	13
1.12 Dérivée de la fonction arc cosinus	13
1.13 Fonction arc tangente	14
1.14 Dérivée de la fonction arc tangente	14
Exercices	15

2.	Fonctions exponentielles	22
	Introduction	22
	Exploration	24
	Synthèse	28
1.	Qu'est-ce qu'une croissance ou une décroissance exponentielle ?	28
2.	Comment définir une fonction exponentielle de base a ?	29
	2.1 Théorème d'existence	29
	2.2 Fonction exponentielle de base a	29
	2.3 Puissances irrationnelles d'un réel positif	30
	2.4 Puissances irrationnelles de 1	30
	2.5 Puissances irrationnelles de 0	31
3.	Quelles sont les caractéristiques graphiques des fonctions exponentielles ?	31
4.	Quelles sont les propriétés des puissances à exposants réels ?	32
	2.6 Propriétés des puissances	32
5.	Comment reconnaître un accroissement de type exponentiel ?	32
6.	Comment dériver les fonctions exponentielles ?	33
	2.7 Dérivabilité en 0 de la fonction $f(x) = a^x$	33
	2.8 Logarithme népérien d'un nombre strictement positif	33
	2.9 Dérivée de la fonction $f(x) = a^x$	33
	2.10 Nombre d'Euler	34
	2.11 Fonction exponentielle népérienne	34
	2.12 Logarithme népérien de e	34
	2.13 Dérivée de la fonction exponentielle népérienne	34
7.	Comment résoudre une équation exponentielle ?	35
	2.14 Principe d'équivalence (égalité de deux images par une fonction exponentielle)	35
8.	Comment résoudre une inéquation exponentielle ?	35
	2.15 Principes d'équivalence (inégalité de deux images par une fonction exponentielle)	35
9.	Quelles sont les caractéristiques de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$?	36
	Outils numériques	38
	Exercices	41
3.	Fonctions logarithmes	53
	Introduction	53
	Exploration	54
	Synthèse	59
1.	Comment définir les fonctions logarithmes ?	59

3.1. Définition d'une fonction logarithme de base a	59
3.2 Principe d'équivalence fondamental	59
2. Quelles sont les caractéristiques graphiques des fonctions logarithmes ?	60
3. Qu'est-ce qu'un repère semi-logarithmique ? Comment lire ou construire une échelle logarithmique ?	61
4. Quelles sont les propriétés des logarithmes ?	62
3.3 Propriétés immédiates	62
3.4 Logarithme d'un produit	62
3.5 Logarithme d'une puissance	62
3.6 Logarithme d'un quotient	62
5. Comment changer de base ?	63
3.7 Changement de base pour les exponentielles	63
3.8 Changement de base pour les logarithmes	63
6. Comment résoudre des équations logarithmiques ?	64
3.9 Principe d'équivalence (égalité de deux logarithmes)	65
7. Comment résoudre des inéquations logarithmiques ?	66
3.10 Principes d'équivalence (inégalité de deux logarithmes)	66
3.11 Généralisation du principe d'équivalence fondamental	67
8. Quel lien peut-on faire entre le logarithme de base e et le logarithme népérien ?	68
3.12 Identification du logarithme népérien avec le logarithme de base e	68
9. Quelles sont les propriétés de la fonction \ln ?	69
3.13 Propriétés des logarithmes népériens	69
10. Comment dériver les fonctions logarithmes ?	70
3.14 Dérivée de la fonction logarithme népérien	70
3.15 Dérivée de la fonction logarithme de base a	70
11. Comment classer, suivant leur croissance, les fonctions puissances, exponentielles et logarithmes ?	71
12. Comment exprimer certaines fonctions à l'aide de la fonction exponentielle népérienne ?	73
Outils numériques	75
Exercices	76
4. Intégrales et primitives	102
Introduction	102
Exploration	104
Synthèse	110
1. Qu'appelle-t-on intégrale définie ?	110
4.1 Intégrale définie de f	111
2. Comment approcher numériquement une intégrale définie ?	111

3.	Quelles sont les propriétés de l'intégrale définie ?	114
	4.2 Linéarité	114
	4.3 Aire nulle	114
	4.4 Additivité	114
	4.5 Positivité	114
	4.6 Ordre	114
4.	Qu'appelle-t-on primitive d'une fonction ?	115
	4.7 Primitive d'une fonction	115
	4.8 Théorème de structure	115
	4.9 Intégrale indéfinie de f	116
5.	Quel est le lien entre l'intégrale définie et les primitives d'une fonction ?	116
	4.10 Théorème de la moyenne	116
	4.11 Théorème d'existence	117
	4.12 Théorème fondamental du calcul intégral	118
6.	Comment calculer une primitive de fonction usuelle ou de fonction composée ?	118
7.	Comment calculer une primitive par substitution ?	120
8.	Comment calculer une primitive par changement de variable ?	121
9.	Comment calculer une primitive par parties ?	123
	4.13 Intégration par parties	123
10.	Comment intégrer des fonctions trigonométriques ?	124
11.	Comment calculer les primitives des fonctions rationnelles ?	125
12.	Comment calculer (exactement) une intégrale définie ?	127
13.	Comment calculer l'aire d'une surface ?	130
14.	Comment utiliser le calcul intégral pour calculer des volumes ?	132
15.	Comment calculer la longueur d'un arc de courbe ?	136
	Outils numériques	137
	Exercices	140
5.	Lieux géométriques	162
	Introduction	162
	Exploration	164
	Synthèse	167
1.	Comment choisir un repère dans le plan ?	167
	5.1 Repère affine (fig. 7)	167
	5.2 Repère orthonormé (fig. 8)	167
2.	Comment caractériser la droite en géométrie analytique plane (rappels) ?	168

3.	Comment caractériser le cercle en géométrie analytique plane ?	170
	5.3 Cercle de centre C et de rayon r	170
	5.4 Équation d'un cercle	170
4.	Comment démontrer une propriété en utilisant les outils de la géométrie analytique ?	172
5.	Comment déterminer un lieu géométrique par la méthode de traduction ?	174
6.	Comment déterminer un lieu par la méthode des génératrices ?	175
7.	Comment construire un lieu en utilisant des équations paramétriques ?	179
	Outils numériques	181
	Exercices	185
6.	Les coniques	192
	Introduction	192
	Exploration	194
	Synthèse	201
1.	Comment caractériser une parabole ?	201
	6.1 Définition de la parabole	201
	6.2 Équation cartésienne de la parabole	202
2.	Comment caractériser une ellipse ?	204
	6.3 Définition de l'ellipse	204
	6.4 Équation cartésienne de l'ellipse \mathcal{E}	205
3.	Comment caractériser une hyperbole ?	207
	6.5 Définition de l'hyperbole	207
	6.6 Équation de l'hyperbole	208
4.	Quelles sont les caractéristiques communes des coniques ?	211
	6.7 Une propriété de l'ellipse et de l'hyperbole	211
	6.8 Caractérisation focale	211
5.	Comment réduire l'équation d'une conique ?	213
6.	Comment déterminer l'intersection d'une conique et d'une droite ?	215
7.	Comment déterminer l'équation d'une tangente à une conique ?	216
	6.9 Tangente en un point d'une ellipse	217
	6.10 Tangente en un point d'une hyperbole	217
	6.11 Tangente en un point d'une parabole	217
	6.12 Tangente de pente donnée à une hyperbole	218
	6.13 Tangente de pente donnée à une ellipse	218
	6.14 Tangente de pente donnée à une parabole	218
8.	Quelles sont les propriétés optiques des coniques ?	219

6.15 Propriété optique de la parabole	219
6.16 Propriété optique de l'ellipse et de l'hyperbole	221
Outils numériques	222
Exercices	224
7. Nombres complexes	238
Introduction	238
Exploration	240
Synthèse	245
1. Comment définit-on l'ensemble des nombres complexes ?	245
7.1 Ensemble \mathbb{C} des nombres complexes	245
7.2 Nombres complexes égaux	246
7.3 Nombre complexe conjugué	246
2. Comment représenter un nombre complexe dans le plan euclidien ?	246
3. Comment définir l'addition dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes ? Quelles sont ses propriétés ?	247
7.4 Définition de la somme de deux nombres complexes z_1 et z_2	247
4. Comment définir la multiplication dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes ? Quelles sont ses propriétés ?	248
7.5 Définition du produit de deux nombres complexes z_1 et z_2	248
7.6 Définition du quotient de deux nombres complexes	248
7.7 Calcul de l'inverse d'un nombre complexe	249
7.8 Calcul du quotient de deux nombres complexes	249
5. Comment résoudre une équation du second degré dans \mathbb{C} ?	249
7.9 Solutions d'une équation du second degré à coefficients réels	250
7.10 Solutions d'une équation du second degré à coefficients complexes	251
6. Comment écrire un nombre complexe non nul sous forme trigonométrique ? Quelles propriétés en déduire ?	251
7.11 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul	252
7.12 Égalité de deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique	253
7.13 Nombres complexes conjugués	253
7.14 Nombres complexes inverses	253
7.15 Produit de nombres complexes	253
7.16 Quotient de deux nombres complexes	253
7.17 Puissance d'un nombre complexe	254
7.18 Formule de Moivre	254
7.19 Forme exponentielle	255

7.	Comment calculer les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe ? Comment les représenter dans le plan de Gauss ?	255
8.	Quelles transformations du plan peut-on associer aux opérations définies dans \mathbb{C} ?	257
	Exercices	259
8.	Probabilités	269
	Introduction	269
	Exploration	270
	Synthèse	275
1.	Qu'appelle-t-on expérience aléatoire ? Qu'appelle-t-on événement ?	275
	8.1 Expérience aléatoire	275
	8.2 Catégorie d'épreuve(s)	275
	8.3 Événement	275
	8.4 Événement élémentaire	276
	8.5 Événement impossible	276
	8.6 Événement certain	276
	8.7 Événements contraires	276
2.	Quelles sont les notions importantes relatives aux événements ?	277
	8.8 Opérations sur les événements	277
	8.9 Événements incompatibles	277
3.	Qu'appelle-t-on probabilité d'un événement ? Comment la déterminer ?	278
4.	Quelles sont les propriétés des probabilités ?	280
5.	Qu'appelle-t-on cas d'équiprobabilité ? Comment alors calculer la probabilité d'un événement ?	281
	8.10 Équiprobabilité	281
6.	Comment modéliser une situation de probabilité ?	282
7.	Qu'appelle-t-on probabilité conditionnelle ?	285
8.	Comment définir et déterminer une probabilité conditionnelle ?	286
	8.11 Probabilité conditionnelle	286
9.	Comment déterminer des événements indépendants ?	287
	8.12 Evénements indépendants	288
	Outils numériques	289
	Exercices	294
9.	Analyse combinatoire	313
	Introduction	313
	Exploration	314
	Synthèse	319

1.	Que signifie dénombrer ? Comment caractériser un groupement ?	319
2.	Qu'est-ce qu'un arrangement ? Comment le reconnaître ?	319
	9.1 Arrangement simple	319
	9.2 Nombre d'arrangements simples	319
	9.3 Arrangement avec répétitions	320
	9.4 Nombre d'arrangements avec répétitions	320
3.	Qu'est-ce qu'une permutation ? Comment la reconnaître ?	321
	9.5 Permutation simple	321
	9.6 Nombre de permutations simples	321
	9.7 Permutation avec répétitions	321
	9.8 Nombre de permutations avec répétitions	321
4.	Qu'est-ce qu'une combinaison ? Comment la reconnaître ?	322
	9.9 Combinaison simple	322
	9.10 Nombre de combinaisons simples	322
	9.11 Combinaison avec répétitions	323
	9.12 Nombre de combinaisons avec répétitions	323
5.	Comment aborder un exercice de dénombrement ?	324
6.	Quelles sont les propriétés des nombres C_n^p ? Comment les utiliser pour développer $(a + b)^n$?	324
	9.13 Propriétés des nombres C_n^p	324
	9.14 Triangle de Pascal	325
	9.15 Binôme de Newton	325
	Outils numériques	328
	Exercices	330
10.	Variables aléatoires et lois de probabilités	342
	Introduction	342
	Exploration	344
	Synthèse	349
1.	Qu'appelle-t-on variable aléatoire discrète ? Comment définir sa loi de probabilité et sa fonction de répartition ?	349
	10.1 Variable aléatoire	349
	10.2 Loi de probabilité	349
	10.3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète	350
2.	Quelles sont les caractéristiques d'une variable aléatoire discrète ?	350
	10.4 Espérance mathématique	350
	10.5 Variance d'une variable aléatoire discrète	351
	10.6 Écart-type	351

3.	Qu'est-ce qu'une loi uniforme discrète ? Quelles sont ses caractéristiques ?	352
	10.7 Loi uniforme discrète	352
	10.8 Espérance et écart-type d'une loi uniforme discrète prenant les valeurs de 1 à n	352
4.	Qu'est-ce qu'une loi binomiale ?	353
	10.9 Épreuve de Bernoulli	353
	10.10 Schéma de Bernoulli	354
	10.11 Loi binomiale de paramètres n et p	354
	10.12 Espérance mathématique, variance et écart-type d'une loi binomiale	355
5.	Qu'est-ce qu'une variable aléatoire continue ? Comment définir sa densité de probabilité et sa fonction de répartition ?	355
	10.13 Variable aléatoire continue	355
	10.14 Densité de probabilité	356
	10.15 Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue	356
	10.16 Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire continue	356
6.	Variable aléatoire discrète ? Variable aléatoire continue ?	357
7.	Qu'est-ce qu'une loi uniforme continue ? Quelles sont ses propriétés ?	357
	10.17 Loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$	357
	10.18 Espérance mathématique et variance d'une loi uniforme	358
	10.19 Loi uniforme continue sur $[0; 1]$	358
8.	Qu'est-ce qu'une loi (de distribution) normale ?	359
	10.20 Loi de distribution normale	359
9.	Comment calculer $P(X \leq a)$ pour une loi normale ?	360
10.	Comment s'assurer qu'une distribution statistique suit une loi normale ?	361
11.	Dans quelles circonstances est-on amené à approximer une loi binomiale par une loi normale ?	361
	Outils numériques	362
	Exercices	367
	Index	383